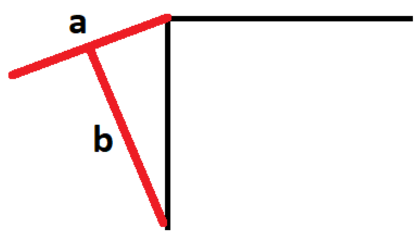
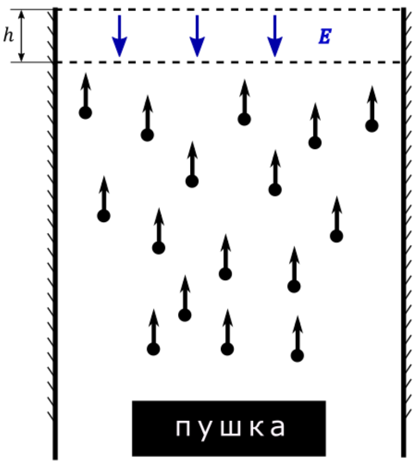
Время выполнения заданий — 180 минут.

Пишите разборчиво. В работе не должно быть никаких пометок, не относящихся к ответам на вопросы. Если Вы не знаете ответа, ставьте прочерк.
Проверяться будет как сам ответ в бланке, так и черновики, по которым будет восстанавливаться логика получения результата.

Максимальное количество баллов — 100.

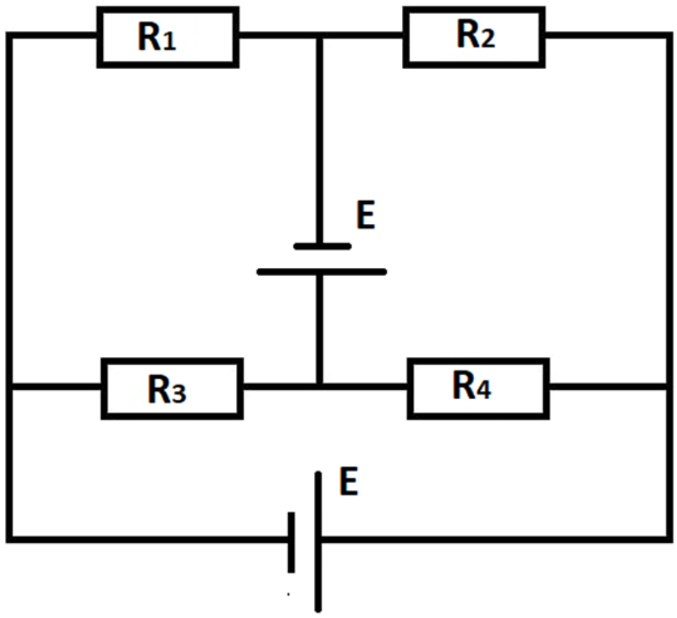


Задача 1. У буквы «Т» «ножка» и «плечики» изготовлены из плоской рейки с постоянной погонной плотностью, ребро рейки направлено ортогонально плоскости буквы. Буква «Т» свисает с края стола, как показано на рисунке. В верхней точке соприкосновения буква «Т» касается угла стола нижней стороной своего «плечика», и точка касания расположена у самого его конца. Определите при каком коэффициенте трения буквы «Т» о стол возможно равновесие, если $a = b$, а сила нормальной реакции опоры, действующей со стороны «плечика» "Т" на верхнюю точку касания равна $\frac{7}{10\sqrt{5}}Mg$, где M – полная масса тела, а g – ускорение свободного падения. Коэффициент трения принять одинаковым в обоих точках соприкосновения.

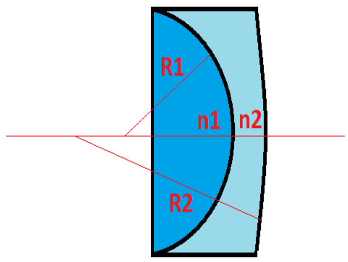


Задача 2. На входе прямого канала с прямоугольным поперечным сечением расположена пушка, испускающая частицы с массой m и зарядом $+q$. На выходе канала расположены две металлические сетки, между которыми фиксирована некоторая разность потенциалов, В результате в пространстве между сетками есть однородное электрическое поле, и на частицу в этом пространстве действует сила F, направленная внутрь канала. Расстояние между сетками равно h. Концентрация выброшенных пушкой частиц, подлетающих к сеткам, равна n, а их скорость направлена вдоль канала и равна u. За сетками находится вакуум. Плотность сеток мала, так что частицы практически не натыкаются на провода сеток, пролетая сквозь них. Найдите давление, с которым частицы действуют на систему двух сеток. Считайте, что концентрация частиц мала, поэтому их взаимодействием друг с другом можно пренебречь.

Задача 3. При изучении свойств источников постоянных токов и напряжений было замечено, что, если заменить оба источника постоянного напряжения, показанных на схеме, на источники постоянных токов с сохранением полярности, то все токи,



протекающие через резисторы, изменятся в одно и то же число раз. Если теперь поставить в верхнее положение источник тока, а в нижнее - источник напряжения, отношение напряжений на $R_2 = 1$ кОм и $R_3 = 4$ кОм равно 1:2. Определите при каком значении R_1 это возможно.



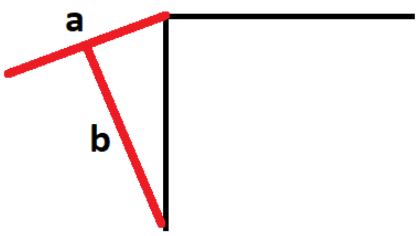
Задача 4. Для того, чтобы создать ахроматическую линзу, используют две линзы из разных материалов. К плосковыпуклой тонкой линзе с радиусом кривизны R_1 и зависимостью показателя преломления от длины волны проходящего света $n_1(\lambda) = n_{01} + \alpha_1 \cdot (\lambda_к - \lambda)$ вплотную прислоняют вогнуто-выпуклую тонкую линзу с радиусами кривизны R_1 и R_2 и показателем преломления $n_2(\lambda) = n_{02} + \alpha_2 \cdot (\lambda_к - \lambda)$. Определите, при каком значении R_2 данная система будет ахроматической, то есть её фокусное расстояние не будет зависеть от длины световой волны. Какой при этом будет величина фокусного расстояния? $R_1 = 40$ см, $n_{01} = 1{,}805$, $\alpha_1 = 100$ м$^{-1}$, $n_{02} = 1{,}500$, $\alpha_2 =$ 150 м$^{-1}$.

10 класс. Решения.

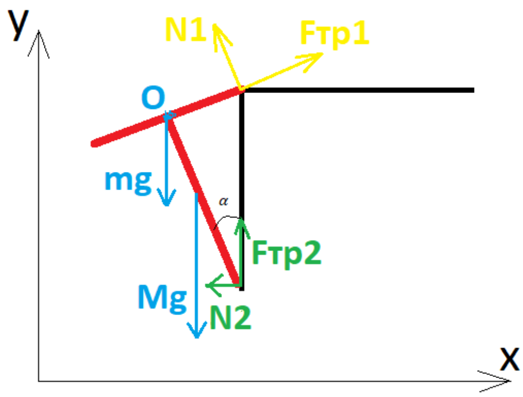
Каждая задача оценивается в 25 баллов, всего 4 задачи, сумма баллов равна 100. Решение каждой задачи состоит из нескольких шагов, соответствующее разбиение по баллам приведено после решения каждой задачи.

Задача 1. Механика.

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (25 баллов). У буквы «Т» «ножка» и «плечики» изготовлены из плоской рейки с постоянной погонной плотностью, ребро рейки направлено ортогонально плоскости буквы. Буква «Т» свисает с края стола, как показано на рисунке. В верхней точке соприкосновения буква «Т» касается угла стола нижней стороной своего «плечика», и точка касания расположена у самого его конца. Определите при каком коэффициенте трения буквы «Т» о стол возможно равновесие, если $a = b$, а сила нормальной реакции опоры, действующей со стороны «плечика» “Т” на верхнюю точку касания равна $\frac{7}{10\sqrt{5}}Mg$, где M – полная масса тела, а g – ускорение свободного падения. Коэффициент трения принять одинаковым в обоих точках соприкосновения.



Решение: Введем массу $m = M/2$ -- масса нижней и верхней частей по отдельности.



Введем угол α между нижней части балки и вертикалью.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2b} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Легко определить его синус и косинус:

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad (2)$$

Запишем закон Ньютона вдоль вертикальной и горизонтальной оси:

$$ox: F_1\cos\alpha - N_1\sin\alpha - N_2 = 0 \qquad (3)$$

$$\text{oy}: N_1\cos\alpha + F_1\sin\alpha + F_2 - mg - mg = 0 \qquad (4)$$

Запишем правило моментов относительно точки O:

$$\text{O}:\ 0{,}5a\,N_1 + b\,F_2\sin\alpha = 0{,}5b\,mg\sin\alpha + b\,N_2\cos\alpha \qquad (5)$$

Где F_1 и F_2 – соответствующие силы трения. Заметим, что в уравнениях (2)-(4) значение их ещё не определено и было бы опрометчиво записывать, что обе силы трения равны силе трения скольжения μN. Записанные уравнения – это уравнения, неизбежно вытекающие из того условия, что тело покоится. Эти уравнения необходимо дополнить условием на то, что обе силы трения не больше силы трения скольжения:

$$F_1 \leq \mu N_1 \qquad (6)$$

$$F_2 \leq \mu N_2 \qquad (7)$$

Из уравнений (3)-(5) можем получить:

$$F_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}N_1 + 3mg\sin\alpha\right) \qquad (8)$$

$$F_2 = \frac{1}{4}\left(mg\,(5 + 3\cos 2\alpha) - N_1\left(2\frac{a}{b}\sin\alpha\ - 4\right)\right) \qquad (9)$$

$$N_2 = -N_1\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\ \left(\frac{a}{b}N_1 + 3mg\sin\alpha\right) \qquad (10)$$

Подставляя параметры задачи из условия, получаем:

$$F_1 = \frac{11}{5\sqrt{5}}mg \qquad (8)$$

$$F_2 = mg \qquad (9)$$

$$N_1 = \frac{7}{5\sqrt{5}}mg \qquad (10)$$

$$N_2 = \frac{3}{5}mg \qquad (11)$$

Учтём теперь условия (6) и (7):

$$\frac{11}{5\sqrt{5}} \leq \mu\frac{7}{5\sqrt{5}} \qquad (12)$$

$$1 \leq \mu\frac{3}{5} \qquad (13)$$

Откуда получается ограничение на коэффициент трения

$$\mu \geq \frac{5}{3} \approx 1{,}67 \qquad (14)$$

При всех таких коэффициентах трения возможно равновесие.

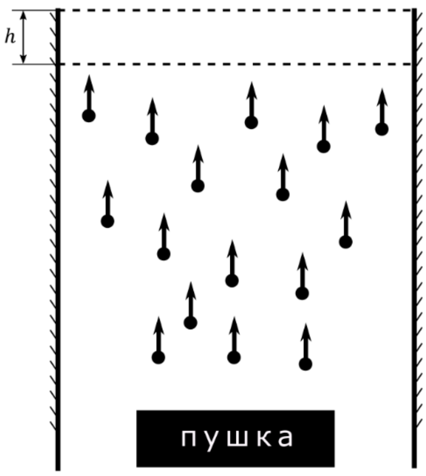
Разбалловка.

Правильно указаны все силы, действующие на тело	1 балл
Записан II закон Ньютона в проекции на одну ось	2 балла
Записан II закон Ньютона в проекции на вторую ось	2 балла
Записано правило моментов	2 баллов
Обоснован выбор значений сил трения или это в решении не используется	6 баллов

Найдена нижняя граница искомого промежутка	3 балла
Найден весь промежуток	9 баллов

Задача 2. Термодинамика

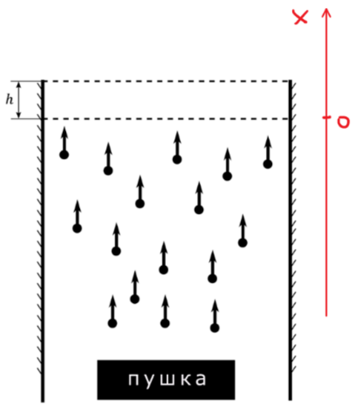
Условие (Вергелес Сергей Сергеевич) (25 баллов). На входе прямого канала с прямоугольным поперечным сечением расположена пушка, испускающая частицы с массой m и зарядом $+q$. На выходе канала расположены две металлические сетки, между которыми фиксирована некоторая разность потенциалов, В результате в пространстве между сетками есть однородное электрическое поле, и на частицу в этом пространстве действует сила F, направленная внутрь канала. Расстояние между сетками равно h. Концентрация выброшенных пушкой частиц, подлетающих к сеткам, равна n, а их скорость направлена вдоль канала и равна u. За сетками находится вакуум. Плотность сеток мала, так что частицы практически не натыкаются на провода сеток, пролетая сквозь них. Найдите давление, с которым частицы действуют на систему двух сеток. Считайте, что концентрация частиц мала, поэтому их взаимодействием друг с другом можно пренебречь.



Решение.

При различных наборах параметров у этой задачи будет два множества непрерывных ответов. Эти наборы параметров будут отвечать за два типа движения: частицы пролетают электрическое поле насквозь и частицы разворачиваются в электрическом поле, меняя направление своей скорости. Рассмотрим отдельно эти два случая.

Рассмотрим для начала ситуацию, в которой частицы разворачиваются в электрическом поле, то есть толщины h хватает для того, чтобы остановить в некоторый момент частицу и заставить лететь её в противоположном направлении. Введём ось Ox, как показано на рисунке. Тогда зависимость координаты и скорости частицы, влетевшей в начальный момент времени в электрическое поле, будет выглядеть следующим образом



$$x(t) = u\,t - \frac{F}{2m}t^2 \qquad (1)$$

$$v(t) = u - \frac{F}{m}t \qquad (2)$$

Определим теперь критическую ширину h, при которой возможен такой тип движения частицы – с разворотом в поле.

Время, через которое частица будет иметь нулевую скорость, равняется, из уравнения (2):

$$t^* = \frac{um}{F} \qquad (3)$$

Подставляя это время в зависимость координаты от времени (1), получаем условие на точку разворота – она должна находиться в области действия силы F:

$$h > x(t^*) \qquad (4)$$

Подставляя в (4) закон движения (1), получаем условие на критическую толщину:

$$h^* = \frac{u^2 m}{2\,F} \qquad (5)$$

Определим теперь давление частиц на систему сеток, создающих электрическое поле в случае, когда $h > h^*$, то есть, когда частицы разворачиваются в электрическом поле.

За время dt через площадь сечения канала dS пролетает число частиц, равное

$$dN = n\,dS\,udt \qquad (6)$$

Эти частицы, повернувшись в электрическом поле, вылетают из него внутрь канала с той же скоростью, с которой они влетали в поле, поэтому полное изменение импульса этих частиц в проекции на ось Ox будет равно

$$dP_ч = -2mu\,dN \qquad (7)$$

По третьему закону Ньютона, такой же импульс, но с противоположным знаком, приобрела система из двух сеток, создающая это электрическое поле

$$dP_c = 2mu\,dN \qquad (8)$$

Учитывая, что сила, действующая на элемент площади dS системы двух сеток равна $dF = dP_c/dt$ и что давление на эти сетки будет равно $p = dF/dS$, получаем итоговое давление

$$p = 2mu^2 n \qquad (9)$$

Напомним, что это давление в случае $h > h^*$.

Осталось рассмотреть случай $h < h^*$. В этом случае частицы пролетают электрическое поле насквозь и в канал более не возвращаются. Посчитаем также изменение импульса частиц, пролетевших через поперечное сечение канала площади dS за время dt и с его помощью найдём соответствующее изменение импульса участка системы сеток той же площади за то де время.

Рассмотрим частицу, которая влетела в электрическое поле в нулевой момент времени. Законы изменения координаты и скорости для неё внутри поля будут следующими:

$$x(t) = u\,t - \frac{F}{2m}t^2 \qquad (10)$$

$$v(t) = u - \frac{F}{m}t \qquad (11)$$

Посчитаем скорость на вылете из этого поля. Время, которое частица провела в поле, определяется условием

$$x(t_{вылета}) = h \qquad (12)$$

Подставляя в него закон движения (10), получаем два возможных значения $t_{\text{вылета}}$:

$$t_{\text{вылета}} = \frac{m\,u \pm \sqrt{m^2\,u^2 - 2\,F\,m\,h}}{F} \qquad (13)$$

Из которых нас интересует минимальный – тот, что идёт со знаком минус. Отсюда, кстати, видно условие на уже вычисленную критическую толщину поля – выражение под корнем должно быть положительным.

Подставляя найденное время вылета в закон изменения скорости (11), получаем, что на вылете из поля, частицы имеют скорость

$$v_{\text{вылета}} = \sqrt{u^2 - \frac{2\,F\,h}{m}} \qquad (14)$$

Тогда изменение импульса одной частицы будет равно (в проекции на ось Ox)

$$\Delta P_{\text{ч}} = -m\left(u - \sqrt{u^2 - \frac{2\,F\,h}{m}}\right) \qquad (15)$$

Теперь, рассматривая поток частиц, рассуждениями, аналогичными рассуждениям в случае “отражения” частиц, мы получаем давление на систему сеток, равное

$$p = un\,\Delta P_{\text{ч}} \qquad (16)$$

Теперь можно записать полный ответ:

В случае $h > h^*$давление будет равно $p = 2mu^2n$

В случае $h < h^*$ давление будет равно $p = unm\left(u - \sqrt{u^2 - \frac{2\,F\,h}{m}}\right)$

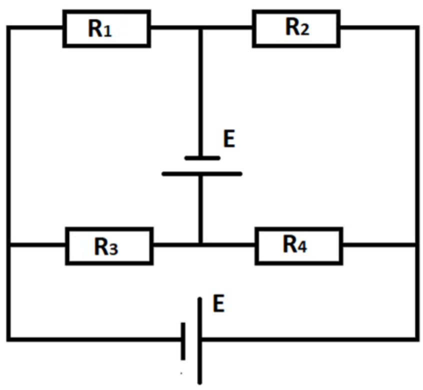
где $h^* = \frac{u^2m}{2\,F}$.

Разбалловка.

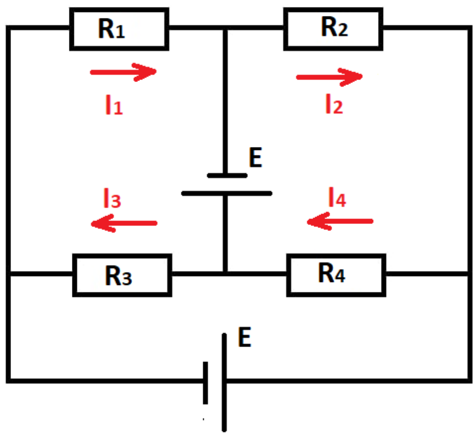
Явно указана необходимость рассмотрения двух возможных диапазонов параметров	5 баллов
Явно найден пороговый параметр	5 баллов
Найдено давление в одном случае	5 баллов
Найдены давления в обоих случаях	10 баллов

Задача 3. Электростатика

Задача 3 (Лужнов Алексей Сергеевич) (25 баллов). При изучении свойств источников постоянных токов и напряжений было замечено, что, если заменить оба источника постоянного напряжения, показанных на схеме, на источники постоянных токов с сохранением полярности, то все токи, протекающие через резисторы, изменятся в одно и то же число раз. Если теперь поставить в верхнее положение источник тока, а в нижнее - источник напряжения, отношение напряжений на $R_2 = 1$ кОм и $R_3 = 4$ кОм равно 1:2. Определите при каком значении R_1 это возможно.



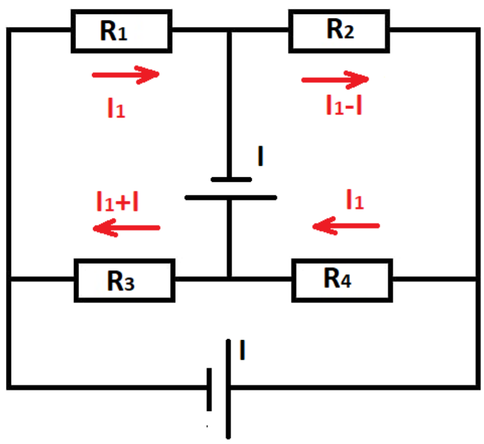
Решение.



Запишем II правило Кирхгофа для контура, проходящего через 2 батареи и резисторы R_1 и R_4:

$I_1R_1 - I_4R_4 = 0$ *(1)*

$\frac{I_1}{I_4} = \frac{R_4}{R_1}$ *(2)*



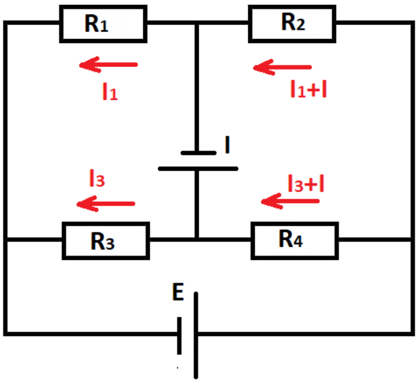
Теперь рассмотрим 2 случай.

Получаем, что сила тока через резисторы R_1 и R_4 совпадают и единственный возможный случай, чтобы токи увеличились пропорционально это когда $R_1 = R_4 = R$.

Переходим к последней схеме.

Запишем II правило Кирхгофа через контур без источников

$I_1R + (I_1 + I)R_2 = I_3R_3 + (I_3 - I)R$ *(3)*



А также воспользуемся отношением напряжений на R_2 и R_3

$\frac{(I_1+I)R_2}{I_3R_3} = \frac{1}{2}$ *(4)*

$\frac{I_1+I}{I_3} = 2$ *(5)*

Теперь можем сгруппировать слагаемые

$(I_1 + I - I_3)R = I_3R_3 - (I_1 + I)R_2$ *(6)*

Используя уравнение (4), получим линейное уравнение на R

$I_3R = I_3R_3 - 2\, I_3R_2$ (7)

Откуда получаем $R = R_1 = 2$ кОм

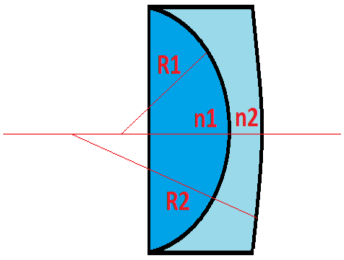
.

Разбалловка.

Записаны уравнения Кирхгофа в первом случае	1 балл
Записаны уравнения Кирхгофа во втором случае	1 балл
Записаны уравнения Кирхгофа в третьем случае	1 балл
Определено равенство $R_1 = R_4$ или это равенство не было использовано при решении	7 баллов
Определено искомое сопротивление	15 баллов

Задача 4. Оптика

Условие (Лужнов Алексей Сергеевич) (25 баллов). Для того, чтобы создать ахроматическую линзу, используют две линзы из разных материалов. К плосковыпуклой тонкой линзе с радиусом кривизны R_1 и зависимостью показателя преломления от длины волны проходящего света $n_1(\lambda) = n_{01} + \alpha_1 \cdot (\lambda_к - \lambda)$ вплотную прислоняют вогнуто-выпуклую тонкую линзу с радиусами кривизны R_1 и R_2 и показателем преломления $n_2(\lambda) = n_{02} + \alpha_2 \cdot (\lambda_к - \lambda)$. Определите, при каком значении R_2 данная



система будет ахроматической, то есть её фокусное расстояние не будет зависеть от длины световой волны. Какой при этом будет величина фокусного расстояния? $R_1 = 40$ см, $n_{01} = 1{,}805$, $\alpha_1 = 100\ \text{м}^{-1}$, $n_{02} = 1{,}500$, $\alpha_2 = 150\ \text{м}^{-1}$.

Решение. Обозначим фокусные расстояния первой и второй линз F_1 и F_2. Согласно формуле линзы, они равны

$$\frac{1}{F_1} = (n_{01} + \alpha_1(\lambda_\text{к} - \lambda) - 1)\frac{1}{R_1} \qquad (1)$$

$$\frac{1}{F_2} = (n_{02} + \alpha_2(\lambda_\text{к} - \lambda) - 1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) \qquad (2)$$

Фокусное расстояние составной системы линз F определяется уравнением

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2} \qquad (3)$$

Складывая (1) и (2), заключаем, что фокусное расстояние составной системы (3) не зависит от длины волны, если

$$\frac{\alpha_1(\lambda_\text{к} - \lambda)}{R_1} + \alpha_2(\lambda_\text{к} - \lambda)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) = 0,$$

то есть когда

$$R_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1}R_1 = 120\ \text{см}.$$

В частности, если материалы линз одинаковы, то мы приходим к тому, что R_2 должно быть неограниченно большим. Это означает, что задняя поверхность линзы является плоской, и оптическая сила у такой линзы отсутствует. Если же материалы разные, то

$$\frac{1}{F} = \frac{n_{01} - 1}{R_1} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\frac{n_{02} - 1}{R_1} = \frac{1}{85}\ \text{см}^{-1}$$

$$F = 85\ \text{см}.$$

Разбалловка.

Записана формула линзы	5 баллов
Записано правила сложения диоптрий рядом стоящих линз	5 баллов
Определено условие, при котором фокус системы не зависит от длины волны	5 баллов
Определён радиус R_2	5 баллов
Определено фокусное расстояние системы	5 баллов